بسمه تعالی

مسایل معادلات دیفرانسیل جزیی

(۱) برای هر یک از معادلات زیر مشخص کنید که آیا معادله خطی، شبه خطی و یا غیر خطی است. در صورت خطی بودن تعیین کنید که آیا معادله همگن است و یا غیر همگن و مرتبه آن را مشخص کنید.

الف) $u_{xx} + xu_y = 0$ ب) $uu_x - 2xyu_y = 0$ ج) $u_x^2 + uu_y = 1$

د) $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$ د) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$ ه) $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin(u) = e^y$.

(۲) نشان دهید تابع $u = f(xy)$ که در آن f یک تابع مشتق پذیر دلخواه است در معادله $xu_x - yu_y = 0$ صدق می کند. تحقیق کنید توابع $\sin(xy)$، $\cos(xy)$، $\ln(xy)$، e^{xy} و $(xy)^3$ جوابهای این معادله هستند.

(۳) نشان دهید $u = f(x)g(y)$ که در آن f و g توابع دو بار مشتق پذیر و دلخواه هستند در معادله $uu_{xy} - u_xu_y = 0$ صدق می کند.

(۴) جواب عمومی معادله $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ را بیابید، هرگاه جواب آن به صورت $u(x, y) = f(\lambda x + y)$ برای یک پارامتر نا معلوم λ باشد.

(۵) جواب عمومی هریک از معادلات زیر را بدست آورید:

الف) $u_x + yu_y = 0$ ب) $2xyu_x + (x^2 + y^2)u_y = 0$

ج) $(y + u)u_x + yu_y = x - y$ د) $y^2u_x - xyu_y = x(u - 2y)$

(۶) جواب مسائل کوشی زیر را بدست آورید:

الف) $3u_x + 2u_y = 0$ با شرط $u(x, 0) = \sin x$،

ب) $yu_x + xu_y = 0$ با شرط $u(0, y) = \exp(-y^2)$،

ج) $yu_x + xu_y = xy,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ با شرط

$u(0, y) = \exp(-y^2)$ به ازای $y > 0$ و $u(x, 0) = \exp(-x^2)$ به ازای $x > 0$.

د) $u_x + xu_y = (y - x^2/2)^2$ با شرط $u(0, y = \exp(y)$،

ه) $xu_x + (x + y)u_y = u + 1$ با شرط $u(x, 0) = x^2$،

و) $2xyu_x + (x^2 + y^2)u_y = 0$ با شرط $u = \exp(\frac{x}{x-y})$ روی $x + y = 1$،

ز) $(y + u)u_x + yu_y = (x - y)$ با شرط $u = 1 + x$ روی $y = 1$،

ح) $x^2u_x - y^2u_y = 0$ با این شرط که $u \to e^x$ هرگاه $y \to \infty$،

ط) $-xu_x + yu_y = 1,\ \ x > 0$ با شرط $u = 2y$ به ازای $x > 0$،

ی) $u_x + 3u_y = u$ با شرط $u(x,x) = \cos x$.

ک) $(x+y)u_x + (x-y)u_y = 1$ با شرط $u(1,y) = 1/\sqrt{2}$.

(۷) معادلات زیر را حل کنید:

الف) $x^2u_x + y^2u_y + z(x+y)u_z = 0$،
ب) $yzu_x - xzu_y + xy(x^2+y^2)u_z = 0$،

ج) $(y+u)u_x + (x+u)u_y = x+y$،
د) $xu(u^2+xy)u_x - yu(u^2+xy)u_y = x^4$،

ه) $(cy-bz)z_x + (az-cx)z_y = bx-ay$،
و) $yu_x + xu_y = xy(x^2-y^2)$

(۸) با بکارگیری روش جداسازی متغیرهابه صورت $u(x,y) = f(x)g(y)$ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $u_x + u = u_y$
ب) $y^2u_x^2 + x^2u_y^2 = (xyu)^2$

ج) $u_xu_y = u^2$
د) $x^2u_{xy} + 9y^2u = 0$ با شرط $u(x,0) = \exp(1/x)$.

(۹) با بکارگیری روش جداسازی متغیرهابه صورت $u(x,y) = f(x) + g(y)$ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $y^2u_x^2 + x^2u_y^2 = 1$
ب) $yu_x + xu_y = 0$ با شرط $u(0,y) = y^2$

(۱۰) با بکارگیری $v = \ln u$ و سپس $v(x,y) = f(x) + g(y)$ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $x^2u_x^2 + y^2u_y^2 = u^2$
ب) $x^2u_x^2 + y^2u_y^2 = (xyu)^2$

ج) نشان دهید جواب قسمت (ب) تحت شرط کوشی $u(x,0) - e^{x^2}$، $u(x,y) = \exp(x^2 + i\sqrt{3}y^2/2)$ است.

(۱۱) نواحی را مشخص کنید که در آن معادله داده شده هذلولوی، سهموی و یا بیضوی باشد و در هر یک از آن نواحی آن رابه فرم متعارف تبدیل کنید.

(الف) $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$
ب) $u_{xx} + y^2u_{yy} = y$
ج) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = e^x$

د) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$
ه) $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0$
و) $u_{xx} - yu_{xy} + xu_x + yu_y + u = 0$

(۱۲) معادله و منحنی مشخصه معادلات زیر را یافته و آنها را به فرم متعارف تبدیل کنید.

الف) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x$
ب) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$

ج) $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} + 7u_y = \sin x$
د) $u_{xx} + u_{yy} + 2u_x + 8u_y + u = 0$

ه) $u_{xy} + 2u_{yy} + 9u_x + u_y = 2$
و) $u_{yy} - 9u_x + 7u_y = \cos y$

(۱۳) جواب هریک از مسایل مقدار اولیه زیر را بدست آورید:

الف) $u_t(x,0) = 1 \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$

ب) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad u(x,0) = \sin(x), \qquad u_t(x,0) = x^2$

ج) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad u(x,0) = \ln(1+x^2), \qquad u_t(x,0) = 2$

د) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = x \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 3$

ه) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin x \qquad u(x,0) = \cos x, \qquad u_t(x,0) = 1 + x$

و) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = xe^t \qquad u(x,0) = \sin x, \qquad u_t(x,0) = 0$

ز) $u_{xxt} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \qquad u(x,0) = \sin x, \qquad u_y(x,0) = x$

(۱۴) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} &=& 4u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &=& x^2, \quad u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x < 0, \\ u(0,t) &=& 0, & t \geq 0 \end{array}$$

(۱۵) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} &=& 9u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &=& 0, \quad u_t(x,0) = x^3, & 0 \leq x < \infty, \\ u_x(0,t) &=& 0, & t \geq 0 \end{array}$$

(۱۶) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} &=& 16u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &=& \sin x, \quad u_t(x,0) = x^2, & 0 \leq x < \infty, \\ u(0,t) &=& 0, & t \geq 0 \end{array}$$

(۱۷) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} &=& c^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &=& f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x < \infty, \\ u(0,t) &=& 0, & t \geq 0 \end{array}$$

اگر F و G بترتیب توسیع فرد f و g روی $\mathbb{R}$ باشند. نشان دهید جواب $u(x,t)$ همانند جواب فنر نامتناهی است

که در آن f با F و g با G جایگزین شده است.

(۱۸) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^{۲}u_{xx}, && \circ < x < \infty, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= f(x), \quad u_t(x,\circ) = g(x), && \circ \leq x < \infty, \\
u_x(\circ,t) &= \circ, && t \geq \circ
\end{aligned}
$$

اگر F و G بترتیب توسیع زوج f و g روی $\mathbb{R}$ باشند. نشان دهید جواب $u(x,t)$ همانند جواب فنر نامتناهی است که در آن f با F و g با G جایگزین شده است.

(۱۹) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^{۲}u_{xx}, && \circ < x < \infty, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= f(x), \quad u_t(x,\circ) = \circ, && \circ \leq x < \infty, \\
u_x(\circ,t) + hu(\circ,t) &= \circ, \quad h = \text{ثابت} && t \geq \circ,
\end{aligned}
$$

شرایط سازگاری جواب را بیان کنید.

(۲۰) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx}, && \circ < x < ۲, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= \sin\frac{\pi x}{۲}, \quad u_t(x,\circ) = \circ, && \circ \leq x \leq ۲, \\
u(\circ,t) &= \circ, \quad u(۲,t) = \circ, && t \geq \circ
\end{aligned}
$$

(۲۱) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx}, && \circ < x < l, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= f(x), \quad u_t(x,\circ) = g(x), && \circ \leq x \leq l, \\
u_x(\circ,t) &= \circ, \quad u_x(l,t) = \circ, && t \geq \circ
\end{aligned}
$$

(۲۲) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & & \circ < x < l, \quad t > \circ, \\ u(x,\circ) &= f(x), & u_t(x,\circ) = g(x), & \quad \circ \leq x \leq l, \\ u(\circ,t) &= p(t), & u(l,t) = q(t), & \qquad\qquad t \geq \circ \end{aligned}$$

(۲۳) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & & \circ < x < l, \quad t > \circ, \\ u(x,\circ) &= f(x), & u_t(x,\circ) = g(x), & \quad \circ \leq x \leq l, \\ u_x(\circ,t) &= p(t), & u_x(l,t) = q(t), & \qquad\qquad t \geq \circ \end{aligned}$$

(۲۴) فرض کنید f دارای مشتق پیوسته روی بازه‌ی $(\circ, l)$ باشد. فرض کنید $f'(\circ^+)$ موجود باشد و فرض کنید $f(\circ^+) = f(\circ) = \circ$. ثابت کنید F_O، تعمیم فرد تابع f در بازه‌ی $(-l, l)$ دارای مشتق پیوسته است.

(۲۵) فرض کنید $f(x)$ تناوبی با دوره‌ی تناوب p باشد، نشان دهید:

$$\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_b^{b+p} f(x)dx,$$

(۲۶) نشان دهید چند جمله‌ایهای ۱، x و $\frac{۳x^۲-۱}{۲}$ در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ دو بدو متعامدند.

(۲۷) نشان دهید هر مجموعه‌ی متعامد از توابع مستقل خطی هستند.

(۲۸) فرض کنید $f_۱$ و $f_۲$ در $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته و دارای سری فوریه یکسان باشند، نشان دهید $f_۱ = f_۲$.

(۲۹) (الف) بسط فوریه تابع f را که در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف شده است را بدست آورید:

$$f(x) = ۴ - x^۲, \quad -۲ \leq x \leq ۲,$$

ب) با استفاده از (الف) مجموع سری های $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ رابدست آورید.

(۳۰)(الف) بسط فوریه تابع f را که در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف شده است را بدست آورید:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \pi\le x\le 0. \end{cases}$$

ب) با استفاده از (الف) مجموع سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ رابدست آورید.

(۳۱) در صورتی که نقاط $(0,0)$ و $(\pm\frac{\pi}{2},0)$ مرکز تقارن نمودار تابع f باشند، ضرایب بسط فوریه تابع f دارای چه خاصیتی هستند؟

(۳۲) فرض کنید توابع f و g روی بازه $(-p,p)$ پیوسته وتناوبی با دوره تناوب $2p$ باشند. اگر ضرایب بسط فوریه f و g بترتیب $a_n,\ b_n$ و $\alpha_n,\ \beta_n$ باشند. نشان دهید:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\alpha_0 a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)$$

(۳۳) فرض کنید تابع f در بازه $(-p,p)$ تناوبی و به ازای هر x، $f(x+p)=-f(x)$. بسط فوریه f را بدست آورید.

(۳۴) فرض کنید f تابعی فردباشد به طوری که $f(l+x)=f(l-x)$.

الف) ثابت کنید دوره تناوب اصلی تابع برابر $4l$ است. ب) ثابت کنید بسط فوریه f به صورت زیر است:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l},\ \ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

(۳۵) فرض کنید f تابعی زوج باشد به طوری که $f(l+x)=-f(l-x)$.

الف) ثابت کنید دوره تناوب اصلی تابع برابر $4l$ است. ب) ثابت کنید بسط فوریه f به صورت زیر است:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l},\ \ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

(۳۶) فرض کنید $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$ و تابع f در شرایط زیر صدق کند. ضرایب سری فوریه f به چه صورت است؟

الف) $f(x+\pi)=f(x)$ ب) $f(\pi/2-x)=f(x)=f(-x)$

ج) $f(\pi-x)=-f(x)$ د) $f(\pi/2+x)=f(x)$

(۳۷) سری فوریه توابع زیر را که دوره تناوب آنها مشخص شده است را بدست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۰ & -۳<x<۰ \\ \sin \pi x/۳ & ۰<x<۳ \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} ۲-x & ۰<x<۴ \\ x-۶ & ۴<x<۸ \end{cases}$

(۳۸) سری فوریه تابع $f(x)=x+x^۲$ را در بازه $(-\pi,\pi)$ و مقدار سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$ را بدست آورید.

(۳۹) سری فوریه تابع $f(x)=\sin(x/۲)$ را در بازه‌های $[-\pi,\pi]$ و $[-۲\pi,۲\pi]$ بدست آورید.

(۴۰) الف) بسط نیم دامنه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=x(\pi-x)$ را در بازه $۰\le x\le\pi$ بدست آورید.
ب) با استفاده از الف) نشان دهید:

$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۶}$ (i $\qquad$ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۶}=\frac{\pi^۶}{۹۴۵}$ (ii $\qquad$ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}=\frac{\pi^۴}{۹۰}$ (iii

$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{(۲n-۱)^۳}=\frac{\pi^۳}{۳۲}$ (iv $\qquad$ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۱۲}$ (v

(۴۱) فرض کنید $a\in\mathbb{Z}$. بسط نیم دامنه سینوسی و کسینوسی توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(x)=\cos ax,\ ۰<x<\pi$ $\qquad$ ب) $f(x)=\sin(ax),\ ۰\le x<\pi$

ج) با استفاده از (الف) و (ب) روابط زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned}\cot a\pi &= \frac{۱}{a\pi}-\frac{۲a}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-a^۲}=\frac{۱}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{۱}{n+a},\\ \csc a\pi &= \frac{۱}{a\pi}-\frac{۲a}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲-a^۲}=\frac{۱}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+a}\end{aligned}$$

(۴۲) فرض کنید $\cosh x=\sum_{n=۱}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$. b_n را با دو بار مشتق گیری و با دو بار انتگرال گیری از این سری بدست آورید.

(۴۳) الف) سری فوریه تابع $f(x)=|\sin(x)|$ را بدست آورید.
ب) با استفاده از (الف) مقدار سری عددی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۱-۴n^۲)^۲}$ را بدست آورید.

(۴۴) جواب مساله زیر را بدست آورید که در آن h، k و A ثابت هستند.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^۲u_{xx}+A\sinh x,\quad ۰<x<l,\qquad t>۰,\\ u(x,۰) &= u_t(x,۰)=۰,\qquad ۰\le x\le l,\end{aligned}$$

$$u(0,t) = h, \quad u(l,t) = k, \qquad t \geq 0$$

(۴۵) وجود و یکتایی جواب مساله با شرط اولیه و مرزی زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u_x(l,t) = 0, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

(۴۶)جواب مساله زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(-\pi,t) &= u(\pi,t), \qquad t \geq 0, \\ u_x(-\pi,t) &= u_x(\pi,t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

(۴۷) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + h(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= p(t), \quad u_x(l,t) = q(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

(۴۸)جواب مساله زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + xt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin \pi x, \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= t, \quad u(1,t) = t^2, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

(۴۹)جواب مساله زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + h, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad h \text{ ثابت} \\ u(x,0) &= x, \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) &= \sin t, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$u(1,t)+u_x(1,t) = 2, \qquad t \geq 0,$$

(۵۰) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + h(x,t), && 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x,0) &= g(x), && 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0,t) &= p(t), \quad u_x(l,t) = q(t), && t \geq 0 \end{aligned}$$

(۵۱) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx}, && 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x, && 0 \leq x \leq 4, \\ u(0,t) &= 10, \quad u_x(4,t) = 0, && t \geq 0 \end{aligned}$$

(۵۲) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u + 1, && 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, && 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) &= 1, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 2, && t \geq 0 \end{aligned}$$

(۵۳) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u, && 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 1 + e^x, && 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) - u_x(0,t) &= u(1,t) = 0, && t \geq 0 \end{aligned}$$

(۵۴) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2u_x, && 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 2e^{-x}, && 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, && t \geq 0 \end{aligned}$$

(۵۵) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - x\sin t, && 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, && t \ge 0 \end{aligned}$$

راهنمایی: تابع $\phi(x)$ را چنان بیابید که $u(x,t) = w(x,t) + \phi(x)\sin(t)$.

(۵۶) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-2t}\sin 5x, && 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) &= 1, \ \ u(\pi,t) = 0, && t \ge 0 \end{aligned}$$

(۵۷) فرض کنید $u(x,t)$ در معادله $u_t = u_{xx}$ صدق کند نشان دهید تابع $w(x,t) = -\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله با مشتقات جزیی $w_t + ww_x = w_{xx}$ صدق می کند.

(۵۸) با تغییر متغیر $u(x,t) = e^{\delta t}w(x,t)$ می توان تابع $u(x,t)$ را در معادلات حرارت حذف کرد. این تغییر متغیر را برای حل معادلات زیر به کار گیرید.
الف)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 4u, && 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x, && 0 \le x \le 2, \\ u_x(0,t) &= u_x(2,t) = 0, && t \ge 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u - e^{x}, && 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) &= 1, \quad u_x(1,t) = 0, && t \ge 0 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}+u-1, \quad 0<x<1, \quad t>0,\\ u(x,0) &= 0, \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t) &= u_x(1,t)=0, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

(۵۹)تغییر متغیر مساله قبل در حل معادله موج نیز موثر است. با این تغییر متغیر جواب معادلات زیر را بدست آورید:

الف)

$$\begin{aligned} u_{tt}+2au_t+a^2u &= c^2u_{xx}+u-1, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0,\\ u(x,0)=e^x,\ ,u_t(x,0) &= -2ae^x, \quad -\infty<x<\infty,\\ u(0,t)=u_x(1,t) &= 0, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} u_{tt}+2au_t &= a^2u_{xx}+u-1, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad t>0,\\ u(x,0) &= e^x\sin 2x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ u_t(x,0) &= -2ae^x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ u(0,t) &= u(\frac{\pi}{2},t)=0, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

(۶۰) نشان دهید جواب مساله با شرط اولیه و مرزی زیردر صورت وجود یکتااست. سپس نشان دهید جواب فرمال مساله جواب واقعی آن است.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2u_{xx}, \quad 0<x<\pi, \quad t>0,\\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0)=g(x), \quad 0\le x\le\pi,\\ u_x(0,t) &= u_x(\pi,t)=0, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

(۶۱) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}+12x^2, \quad 0<x<1, \quad t>0,\\ u(x,0) &= -x^4+4, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

$$u(\circ,t) \quad = u(\text{۱},t) = \circ$$

(۶۲) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + x^{\text{۲}}\cos t - \text{۲}\sin t, \quad \circ < x < \pi, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= \pi x - x^{\text{۲}}, \qquad \circ \le x \le \pi, \\
u(\circ,t) &= \circ, \quad u(\pi,t) = \pi^{\text{۲}}\sin t, \qquad t \ge \circ
\end{aligned}$$

(۶۳) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx}, \quad \circ < x < \text{۱}, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= f(x), \quad \circ \le x \le \text{۱}, \\
u(\circ,t) - u_x(\circ,t) &= u(\text{۱},t) + u_x(\text{۱},t) = \circ, \qquad t \ge \circ
\end{aligned}$$

(۶۴) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx}, \quad \circ < x < l, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= \circ, \quad , \quad \circ \le x \le l, \\
u_t(x,\circ) &= \sin(\text{۶}x), \quad \circ \le x \le l, \\
u(\circ,t) &= u(l,t) = \circ, \qquad t \ge \circ
\end{aligned}$$

(۶۵) جواب مساله با مقدار اولیه و مرزی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx}, \quad \circ < x < \text{۱}, \quad t > \circ, \\
u(x,\circ) &= f(x), \quad \circ \le x \le \text{۱}, \\
u(\circ,t) - u_x(\circ,t) &= u(\text{۱},t) + u_x(\text{۱},t) = \circ, \quad t \ge \circ
\end{aligned}$$

(۶۶) مساله استورم و لیوویل زیرا در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y &= \circ, \quad \text{۱} \le x \le \text{۱}, \\
a_{\text{۱}}y(\circ) + a_{\text{۲}}y'(\circ) &= \circ, \\
b_{\text{۱}}y(\text{۱}) + b_{\text{۲}}y'(\text{۱}) &= \circ
\end{aligned}$$

که در آن $p,\ r,\ r$ توابعی پیوسته هستند و برای $0 \le x \le 1$ داریم $p(x) > 0$ و $q(x) > 0$.
الف) اگر ϕ یک جواب معادله وابسته به مقدار ویژه λ باشد ثابت کنید $\bar{\phi}$ (مزدوج ϕ) نیز جواب معادله وابسته به همان مقدار ویژه λ است.
ب) ثابت کنید توابع ϕ یا $c\phi$ حقیقی‌اند (c عدد ثابت مختلط).

(۶۷) مساله استورم و لیوویل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = hy(1) + y'(1) &= 0, \quad \text{ثابت } h < -1. \end{aligned}$$

الف)مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله فوق را بیابید.
ب)به طور مستقیم نشان دهید که توابع ویژه این مساله تشکیل یک مجموعه متعامد را می دهند.
ج)بسط تابع $f(x) = 1$ را بر حسب توابع ویژه این مساله بنویسید.

(۶۸) مساله استورم و لیوویل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} y'' + y' + \lambda y &= 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) + y'(0) &= 0, \\ y(1) + hy'(1) &= 0,. \end{aligned}$$

به ازای چه مقادیری از h، $\lambda = \frac{1}{4}$ یک مقدار ویژه است. تابع ویژه نظیر این مقدار ویژه را بیابید.

(۶۹) مقادیر ویژه وتوابع ویژه مسایل استورم و لیوویل منظم زیر را بیابید:
الف)

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 3xy' + \lambda y &= 0, \quad 1 \le x \le e \\ y(1) = y(e) &= 0, \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} [(2+x)^2 y']' + \lambda y &= 0, \quad -1 \le x \le 1 \\ y(-1) = y(1) &= 0, \end{aligned}$$

ج)

$$(1+x)^2y''+2(1+x)y'+3\lambda y = 0, \quad 0\le x\le 1$$
$$y(0)=y(1) = 0,$$

(۷۰) مساله استورم و لیوویل زیرا در نظر بگیرید:

$$[p(x)y']'-q(x)y+\lambda r(x)y = 0, \quad 0\le x\le 1,$$
$$a_1y(0)+a_2y'(0) = 0,$$
$$b_1y(1)+b_2y'(1) = 0$$

که در آن $p,\ q,\ r$ توابعی پیوسته هستند و برای $0\le x\le 1$ داریم $p(x)>0$ و $r(x)>0$.
الف) نشان دهید اگر λ یک مقدار ویژه و ϕ تابع ویژه نظیر آن باشد آنگاه
$$\lambda\int_0^1 r\phi^2dx=\int_0^1(p(\phi'^2+q\phi^2)dx+\frac{b_1}{b_2}p(1)\phi^2(1)-\frac{a_1}{a_2}p(0)\phi^2(0)$$
به شرط آنکه $a_2\neq 0$ و $b_2\neq 0$. این نتیجه را چگونه می توان برای $a_2=0$ یا $b_2=0$ اصلاح کرد.
ب)نشان دهید اگر $q(x)\ge 0$ و اگر $\frac{b_1}{b_2}$ و $-\frac{a_2}{a_1}$ نا منفی باشند، آنگاه باید مقدار ویژه λ نامنفی باشد.
ج)تحت شرایط قسمت (ب) نشان دهید مقدار ویژه λ مثبت است مگر آنکه برای هر x در بازه $[0,1]$، $q(x)=0$ و همچنین $a_1=b_1=0$.

(۷۱) معادله لژاندر زیر تحت شرایط مرزی داده شده را در نظر بگیرید:
$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0,\ \ y(0)=0,\ \ x\to 1$ هرگاه y و y' کراندار

توابع ویژه این مساله چند جمله ایهای فرد لژاندر به صورت
$\phi_1(x)=p_1(x)=x,\ \phi_2(x)=P_3(x)=(5x^3-3x/2),\ \phi_n(x)=p_{2n-1}(x)\cdots$ هستند.
الف) نشان دهید توابع ویژه آن متعامدند.
ب) جواب فرمال معادله غیر همگن زیر را بیابید:
$[(1-x^2)y']'+\mu y=f(x),\ \ y(0)=0,\ \ x\to 1$ هرگاه y و y' کراندار

که در آن f یک تابع پیوسته برای $0\le x<1$ و μ یک مقدار ویژه مساله همگن نظیر نیست.

(۷۲) معادله

$$(1-x^2)y''-xy'+\lambda y=0,\ \ -1<x<1$$

معادله چبیشف نامیده می شود.

الف) نشان دهید معادله فوق را می توان به فرم خود الحاق زیر تبدیل کرد:

$$[(1-x^2)^{1/2}y']' + \lambda(1-x^2)^{1/2}y = 0, \quad -1 < x < 1$$

ب)نشان دهید معادله قسمت (الف) تحت شرایط مرزی زیر یک مساله خودالحاق است:

y و y' کراندار است هرگاه $x \to \pm 1$

ج) می توان نشان داد که مقادیر ویژه مساله فوق به صورت $\lambda_n = 4n^2,\ n = 0, 1, 2, \cdots$ و توابع ویژه نظیر آن $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$ هستند که چند جمله‌ای های چبیشف نامیده می شوند. نشان دهید

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)dx}{(1-x^2)^{1/2}} = 0, \quad m \neq n$$

(۷۳) مقادیر ویژه و توابع ویژه مسایل استورم ولیوویل زیر را بدست آورید.

الف)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(1) = y(0) + y'(0) = 0,$$

ب)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(\pi),$$

ج)

$$y'' - 3y' + 3(1+\lambda)y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

(۷۴) مقادیر ویژه و توابع ویژه مسایل استورم ولیوویل منظم زیر را بدست آورید.

الف)

$$\begin{aligned} x^2y'' + 3xy' + \lambda y &= 0, \quad 1 < x < e, \\ y(1) = y(e) &= 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} (1+x)^2y'' + 2(1+x)y' + 3\lambda y &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) &= 0 \end{aligned}$$

ج)

$$\frac{d}{dx}[(2+x)^2y' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$y(-1) = y(1) \quad = \quad 0$$

(۷۵) مقادیر ویژه و توابع ویژه مسایل استورم ولیوویل نامنظم زیر را بدست آورید.
الف)

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + \lambda y &= 0, \\ y(1) &= 0, \end{aligned}$$

y و y' کراندار در $x = 0$

ب)

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

y و y' کراندار در ∞

(۷۶) بسط تابع ویژه $f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$ را بر حسب توابع ویژه مساله استورم و لیوویل زیر بدست آورید:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0,$$

(۷۷) هر یک از معادلات زیر را به فرم معادل خودالحاق تبدیل کنید:
الف) معادله لگوور

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ب) معادله هرمیت

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ج) معادله چبیشف

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(۷۸) اگر توابع ویژه مساله

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ry') + \lambda y &= 0, \quad 0 < r < a \\ c_1y(a) + c_2y'(a) &= 0, \quad \lim_{r \to 0^+} y(r) < \infty, \end{aligned}$$

در رابطه $\lim_{r \to 0^+} ry'(r) = 0$ صدق کنند، نشان دهید تمامی مقادیر ویژه به ازای c_1 و c_2 حقیقی، حقیقی هستند.

(۷۹) توابع گرین مسایل زیر را تعیین کنید:
الف)

$$L(y)=y''=0,\quad y(0)=y'(1)=0,$$

ب)

$$L(y)=(1-x^2)y''-2xy'=0,\quad y(0)=y'(1)=0,$$

ج)

$$L(y)=y''+a^2y=0,\quad y(0)=y(1)=0,\quad a \text{ ثابت}$$

(۸۰) جواب مسایل با شرط مرزی زیر را تعیین کنید:
الف)

$$y''=-f(x),\quad y(0)=y'(1)=0,$$

ب)

$$y''=\sin(x),\quad y(0)=y(1)+2y'(1)=0,$$

ج)

$$y''-y=-f(x),\quad y(0)=y(1)=0,$$

(۸۱) توابع گرین مسایل با شرط مرزی زیر را تعیین کنید:
الف)

$$xy''+y'-\frac{n^2}{x}y=-f(x),\quad y(1)=0,\quad \lim_{x\to 0}|y(x)|<\infty,$$

ب)

$$[(1-x^2)y']'-\frac{n^2}{1-x^2}y=-f(x),\quad \lim_{x\to\pm 1}|y(x)|<\infty,$$

ج)

$$y''=-f(x),\quad y(-1)=y(1),\quad y'(-1)=y'(1)$$

(۸۲) جواب معادلات لاپلاس تحت شرایط مرزی زیر و در نواحی داده شده را بدست آورید:
الف)

$$\begin{aligned} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0,\quad r>a,\quad 0<\theta<\pi,\\ u(r,0)=u(r,\pi) &= 0,\quad r\geq a,\\ u(a,\theta) &= f(\theta),\qquad 0\leq\theta\leq\pi. \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} &= ۰, \quad r<a, \quad ۰<\theta<\pi, \\ u(r,۰)=u(r,\pi) &= ۰, \quad r\le a, \\ u(a,\theta) &= f(\theta), \qquad\quad ۰\le\theta\le\pi. \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} &= ۰, \qquad r<a, \\ u(a,\theta) &= f(\theta), \quad -\pi\le\theta<\pi. \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} &= ۰, \quad a<r<b, \quad -\pi\le\theta<\pi \\ u(a,\theta)=f(\theta), \quad u(b,\theta) &= g(\theta), \qquad\qquad -\pi\le\theta<\pi. \end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned} \nabla^۲ u &= ۰, \quad ۱<r<b, \quad ۰<\theta<\pi, \\ u(r,۰)=u(r,\pi) &= ۰, \quad ۱\le r\le b, \\ u(۱,\theta) &= u(b,\theta)=۰, \qquad ۰\le\theta\le\pi. \end{aligned}$$

و)

$$\begin{aligned} \nabla^۲ u = u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} &= ۰, \quad ۱<r<۳, \quad ۰<\theta<\frac{\pi}{۲}, \\ u(r,۰)=(r-۱)(r-۳), \quad u(r,\frac{\pi}{۲}) &= ۰, \quad ۱\le r\le ۳, \\ u(۱,\theta) &= u(۳,\theta)=۰, \qquad ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}. \end{aligned}$$

ز)

$$\nabla^۲ u = u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} = ۰, \quad ۱<r<۳, \quad ۰<\theta<\frac{\pi}{۲},$$

$$\begin{aligned} u(r,\circ)=\circ,\quad u(r,\frac{\pi}{۲}) &= f(r),\ ۱\le r\le ۳,\\ u(۱,\theta) &= u(۳,\theta)=\circ, \qquad \circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}. \end{aligned}$$

ح)

$$\begin{aligned} \nabla^{۲}u &= \circ,\quad r<a,\quad \circ<\theta<\frac{\pi}{۳},\\ u(r,\circ)=u(r,\frac{\pi}{۳}) &= \circ,\quad r\le a,\\ u(a,\theta) &= f(\theta), \qquad \circ\le\theta\le\frac{\pi}{۳}. \end{aligned}$$

ط)

$$\begin{aligned} \nabla^{۲}u &= \circ,\quad \circ<r<۱,\quad \circ<\theta<\frac{\pi}{۲},\\ u(r,\circ)=u(r,\frac{\pi}{۲}) &= \circ,\quad r\le ۱,\\ u_r(۱,\theta) &= f(\theta), \qquad \circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}. \end{aligned}$$

ی)

$$\begin{aligned} \nabla^{۲}u &= \circ,\quad r>a,\quad \circ<\theta<\pi,\\ u(r,\circ)=u(r,\pi) &= \circ,\quad r>a,\\ u(a,\theta) &= f(\theta), \qquad \circ\le\theta\le\pi. \end{aligned}$$

ک)

$$\begin{aligned} \nabla^{۲}u=u_{xx}+u_{yy} &= \circ,\quad \circ<x<a,\quad \circ<y<b,\\ u_x(\circ,y)=u_x(a,y) &= \circ, \qquad \circ\le y\le b,\\ u(x,\circ)=\circ,\ u_x(x,b) &= ۱,\quad \circ\le x\le a. \end{aligned}$$

ل)

$$\begin{aligned} \nabla^{۲}u=u_{xx}+u_{yy} &= \circ,\quad \circ<y<\pi,\quad \circ<x<\infty,\\ u_y(x,\circ)=u_y(x,\pi) &= \circ, \qquad \circ\le x<\infty,\\ u(\circ,y) &= \circ,\quad \circ\le y\le\pi,\quad \text{کراندار}\ u(x,y). \end{aligned}$$

(م

$$
\begin{aligned}
\nabla^{2}u = u_{xx}+u_{yy} &= 0, \quad 0<x<\pi, \quad 0<y<\infty, \\
u(0,y)=u(\pi,y) &= 0, \qquad\qquad 0\le y<\infty, \\
u(x,0) &= 0, \quad 0\le x\le \pi \quad \text{كراندار} \quad u(x,y).
\end{aligned}
$$

(۸۳) نشان دهید شرط سازگاری جواب در مساله نویمن زیر

$$
\begin{aligned}
\nabla^{2}u &= f, \quad \text{در } D, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g, \quad \text{بر } B,
\end{aligned}
$$

$\int_D f dS = \int_B g ds$ است.

(۸۴) مساله زیر را حل کنید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^{2}u &= 0, \qquad a<r<b, \quad 0<\theta<2\pi, \\
u_r(b,\theta) &= g(\theta), \qquad 0\le\theta\le 2\pi, \\
u_r(a,\theta) &= f(\theta), \qquad 0\le\theta\le 2\pi.
\end{aligned}
$$

که در آن $\int_{r=a} f ds - \int_{r=b} g ds = 0$.

(۸۵) مساله رابین در داخل نیم دایره زیر را حل کنید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^{2}u &= 0, \qquad r<b, \quad 0<\theta<\pi, \\
u_r(b,\theta) &= \sin(\theta), \qquad 0\le\theta\le\pi, \\
u(r,0) &= u(r,\pi)=0, \quad r\le b.
\end{aligned}
$$

(۸۶) نشان دهید یک جواب مساله نویمن

$$
\begin{aligned}
\nabla^{2}u &= f, \quad \text{در } D, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g, \quad \text{بر } B,
\end{aligned}
$$

با جواب دیگر این مساله حداکثر به اندازه یک ثابت با هم تفاوت دارند.
(۸۷) جواب مساله زیر را بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u + u &= 0, \quad 0 < r < b, \qquad\quad 0 < \theta < \alpha \\
u(r,0) = u(r,\alpha) &= 0, \quad 0 \le r \le b, \\
u(a,\theta) &= f(\theta), \;\; \text{کراندار} \; u(0,\theta), \quad \theta \le \alpha
\end{aligned}
$$

(۸۸) جواب مساله دیریکله زیر را بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u &= -2, \quad r < b, \quad 0 < \theta < 2\pi, \\
u(b,\theta) &= 0, \qquad\qquad\qquad \theta \le 2\pi
\end{aligned}
$$

(۸۹) جوابی برای مساله نویمن زیر بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u &= -r^2 \sin(\theta), \quad a < r < b, \quad 0 < \theta < 2\pi, \\
u_r(a,\theta) &= u_r(b,\theta) = 0, \qquad\qquad\quad \theta \le 2\pi
\end{aligned}
$$

(۹۰)نمایش انتگرالی مساله نویمن زیرا بدست آورید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u &= f, \;\; \text{در } D \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g, \;\; \text{بر } B
\end{aligned}
$$