

۱. (۱۱ نمره) الف) مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید:
نقطه تعادل مجانبی پایدار، مجموعه ω -حدی مدار نقطه x ، دو دستگاه معادلات دیفرانسیل به طور توپولوژیک معادل، یک مجموعه به طور مثبت پایا، منیفلد پایدار یک نقطه تعادل.
ب) صورت قضایای اصل پایایی لاسال، قضیه وجود و یکتایی جواب های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرط اولیه و لم گرانوال را به دقت بیان کنید.

۲. (۱۰ نمره) فرض کنید که A یک ماتریس ثابت حقیقی $n \times n$ باشد و $x(t)$ جواب مساله مقدار اولیه $x(0) = x_0$ ، $\dot{x} = Ax$ باشد. نشان دهید که اگر $x_0 \in E^S - \{0\}$ ، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

۳. (۱۶ نمره) صورت قضیه لیاپانف برای مجانبی پایدار بودن یک نقطه تعادل یک دستگاه معادله دیفرانسیل خود گردان را بیان کرده، اثبات کنید.

۴. (۲۵ نمره) معادله مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + a\dot{x} - x + x^3 = 0$$

الف) تمامی نقاط تعادل و نوع پایداری آن ها را برای $a \neq 0$ ، تعیین کنید.

ب) نمای فاز این سیستم را به ازای $a = 0$ رسم کنید.

ج) با استفاده از اصل پایایی لاسال دامنه جذب نقاط تعادل چاه این دستگاه را به ازای $a > 0$ تعیین کنید.

۵. (۱۷ نمره) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = 2(x_2 - x_1) + x_1(1 - x_1^2),$$

$$\dot{x}_2 = -2(x_2 - x_1) + x_2(1 - x_2^2),$$

الف) نشان دهید که این دستگاه یک دستگاه گرادیانی است.

ب) با تعیین نقاط تعادل، نوع پایداری آن ها را تعیین کنید.

ج) نمای فاز سرسری دستگاه را رسم کنید.

موفق باشید