

۱. (۵نمره) الف) مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید:
نقطه تعادل مجانبی پایدار، مجموعه α -حدی مدار نقطه x ، تابع لیاپانف قوی، یک مجموعه به طور مثبت پایا، منیفلد پایدار یک نقطه تعادل.
(۶نمره) ب) صورت قضایای چتائف، هارتمن گرابمن و قضیه منیفلد مرکزی را به دقت بیان کنید:
۲. (۶نمره) الف) نشان دهید مجموعه ω -حدی مدار یک نقطه تحت جریان سیستم پایا است.
(۸نمره) ب) قضیه اصل پایایی لاسال را بیان کرده و اثبات کنید.
۳. (۶نمره) الف) مثالی از دو ماتریس حقیقی و 2×2 ، A و B بزنید که $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ (با محاسبه دو طرف نامساوی)
(۸نمره) ب) نشان دهید خاصیت $tr(A^3) \neq 0$ یک خاصیت عام برای مجموعه ماتریس های 2×2 است.
۴. (۷نمره) الف) با استفاده از قضیه منیفلد مرکزی نشان دهید مبدا یک نقطه ناپایدار دستگاه زیر است.
$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 - x_1^3$$

(۷نمره) ب) با استفاده از توابع درجه دوم نوع پایداری مبدا در سیستم زیر را تعیین کنید:
$$\dot{x}_1 = x_1^3 - x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_1^2 + 2x_1^2 x_2 + x_2^3$$
۵. (۲۴نمره) معادله مرتبه دوم $\ddot{x} + \mu \dot{x} - x + x^2 = 0, \mu \geq 0$ را در نظر بگیرید.
الف) نوع پایداری نقاط تعادل را تعیین کنید.
ب) نمای فاز سیستم فوق را به ازای $\mu = 0$ رسم کنید (با ذکر دلیل).
ج) دوره تناوب مدار تناوبی گذرا از $(a, 0)$ و $(b, 0)$ ($0 < a, b < 1$) را به صورت تابعی از b بیان کنید. حد این تابع را هرگاه $b \rightarrow 1^-$ تعیین کنید.
د) برای $\mu > 0$ دامنه جاذبه مبدا را تخمین زده و سپس نمای فاز این سیستم را رسم کنید.
۶. (۲۰نمره) انشعابات که در دستگاه معادلات زیر وابسته به دو پارامتر λ و μ رخ می دهد را با تعیین مجموعه انشعاب و نماهای فاز به طور کیفی نامعادل آن بررسی کنید:
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \lambda + \mu x - x^3.$$

موفق باشید