

بسمه تعالی

دستگاههای دینامیکی ۱

وقت: ۳۰ دقیقه

امتحان میان ترم

۱۰/۹/۸۷

[۱۵ نمره] ۱- الف) مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید:

نقطه تعادل به طور یکنواخت پایدار و مجانبی پایدار، سیکل حدی، دو دستگاه به طور توپولوژیک معادل، مجموعه α -حدی و ω -حدی

(ب) صورت قضایای زیر را به دقت بیان کنید:

قضیه هارتمن گرابمن، قضیه وجود و یکتایی، قضیه اصل پایایی، قضیه منیفلد مرکزی

[۱۵ نمره] ۲- قضیه زیر را ثابت کنید:

قضیه (فلوکه): فرض کنید $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ ، $T > 0$ ، $\forall t > 0$ ، $A(t+T) = A(t)$. دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ را در نظر بگیرید. هر جواب ماتریسی اساسی $X(t)$ این دستگاه دارای فرم $X(t) = P(t)e^{tR}$ ، $t \in \mathbb{R}$ است که در آن R یک ماتریس ثابت، $P(t), R \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ و $\det P(t) \neq 0$.

[۲۰ نمره] ۳- دستگاه مسطح وابسته به دو پارامتر حقیقی λ و μ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x[\lambda - \mu(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2], \\ \dot{y} &= -x + y[\lambda - \mu(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2]\end{aligned}$$

الف) منحنی های انشعاب مدارهای تناوبی این دستگاه را در صفحه μ - λ رسم کرده، نمای فاز مدارهای نوعی نامعادل را رسم کنید.

ب) دیاگرام انشعاب رادر طول منحنی تک پارامتری $\mu = c$ (ثابت) رسم کنید. راهنمایی: دستگاه فوق را در مختصات قطبی باز نویسی کنید.

[۱۵ نمره] ۴- دستگاه $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(0) = 0$ ، $E \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و f از رده $C^1(E)$ باشد. همچنین فرض کنید تابع حقیقی مقدار $V \in C^1$ موجود باشد به طوری که $V(0) = 0$ و \dot{V} مثبت اکید باشد. اگر یک دنباله $\{x_n\}$ همگرا به صفر موجود باشد به طوری که $V(x_n) > 0$. نشان دهید مبدا یک نقطه ناپایدار دستگاه فوق است.

[۱۵ نمره] ۵- معادله مرتبه دوم $\ddot{x} + \mu\dot{x} - x + x^2 = 0$ ، $\mu > 0$ را در نظر بگیرید.

الف) نوع پایداری نقاط تعادل را تعیین کنید.

ب) نمای فاز دستگاه فوق را به ازای $\mu = 0$ رسم کنید (با ذکر دلیل).

ج) نمای فاز سراسری این دستگاه را با ارائه دلیل و ذکر جزئیات رسم کنید.

[۲۰ نمره] ۶- معادله دیفرانسیل $\ddot{\theta} = \omega^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{g}{l} \sin \theta - m\dot{\theta}$ با استفاده از منیفلد مرکزی نشان دهید در $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ یک انشعاب چنگال رخ می دهد. دیاگرام انشعاب را رسم کنید.

موفق باشید