

۱. [۸ نمره] معادله اسکالر $\dot{x} = F(\lambda, x)$ را در نظر بگیرید که در آن $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از رده C^1 است که در شرایط $F(0, 0) = 0$ و $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \neq 0$ صدق می کند. نشان دهید که یک همسایگی از $(\lambda, x) = (0, 0)$ موجود است که در آن هیچ انشعابی از نقاط تعادل رخ نمی دهد.

۲. [۱۳ نمره] فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از رده C^1 است به طوری که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس $Df(\bar{x})$ منفی هستند. نشان دهید نقطه تعادل \bar{x} مجانبی پایدار است (صورت قضایای مورد استفاده را به دقت بیان کنید).

۳. [۹ نمره] نشان دهید خاصیت هذلولوی بودن یک ماتریس حقیقی 2×2 یک خاصیت عام است.

۴. [۱۲ نمره] دستگاه معادلات

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - yf(x)$$

را در نظر بگیرید که در آن $f(0) = g(0) = 0$. قرار دهید $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ و $G(x) = \int_0^x g(s)ds$ و فرض کنید در یک همسایگی محذوفی از مبدا $G(x) > 0$ و $g(x)F(x) > 0$. نشان دهید مبدا یک نقطه تعادل مجانبی پایدار این دستگاه است.

۵. [۲۰ نمره] دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 2ax_2 + x_1^3, \quad a > 0$$

(الف) نوع پایداری تمام نقاط تعادل این دستگاه را تعیین کرده نشان دهید مبدا مجانبی پایدار است.

(ب) دامنه جاذبه مبدا را تخمین زده، نمای فاز این دستگاه را با استدلال کامل رسم کنید.

راهنمایی: دستگاه فوق را به ازای $a = 0$ در نظر بگیرید.

۶. [۱۸ نمره] دستگاه معادلات نیوتنی

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1(1-x_1)(\lambda+x_1)$$

را در نظر بگیرید و تمامی نماهای فاز نامعادل این دستگاه را به ازای $2 < \lambda < 0$ رسم کنید.

۷. [۲۰ نمره] دستگاه معادلات

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = bu - u^2 - av$$

را در نظر بگیرید که در آن a یک ثابت مثبت و b پارامتر انشعاب است که $|b| \ll 1$. با استفاده از منیفولد مرکزی نوع انشعابی که در این دستگاه به ازای $b = 0$ رخ می دهد را تعیین کرده و دیاگرام انشعاب را رسم کنید.

موفق باشید