

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم

دستگاه های دینامیکی ۱

۱۷ دی ۱۳۸۸

وقت ۲۱۵ دقیقه

[۲۰ نمره] (۱) نشان دهید یک انشعاب گره زینی در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم  $\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = M$  رخ می دهد.

[۲۰ نمره] (۲) فرض کنید  $f$  تابعی تحلیلی،  $f(0) = 0$  و  $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  نشان دهید فرم نرمال

دستگاه  $\dot{x} = f(x)$ ،  $x = (x_1, x_2, x_3)^t$  در مختصات استوانه‌ای تا مرتبه دوم به صورت زیر است.

$$\dot{r} = arx_3, \quad \dot{\theta} = \omega + dx_3, \quad \dot{x}_3 = br^2 + cx_3^2$$

راهنمایی: قرار دهید  $z = x_1 + ix_2$  و سپس فرم نرمال را در مختصات  $(z, \bar{z}, x_3)^t$  بدست آورید.

[۲۰ نمره] (۳) نشان دهید در دستگاه معادلات زیر یک انشعاب هاپف به ازای برخی مقادیر  $\alpha$  رخ می دهد. دیاگرام انشعاب را رسم کنید.

$$\dot{x} = A - (\alpha + 1)x + x^2y, \quad \dot{y} = \alpha x - x^2y,$$

راهنمایی: ضریب جمله  $r^3$  در فرم نرمال دستگاه  $\dot{x} = \mu x - \omega y + f(x, y)$ ،  $\dot{y} = \omega x + \mu y + g(x, y)$  در دستگاه مختصات قطبی از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$16b = (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

[۲۰ نمره] (۴) نشان دهید سیستم زیر در حلقه  $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < 4x^2 + \frac{y^2}{4} < 2 \}$  دارای یک سیکل حدی یکتا است.

$$\dot{x} = x - \frac{1}{4}y - 4x^3, \quad \dot{y} = 4x + y - \frac{1}{4}y^3,$$

راهنمایی: قرار دهید  $x = \frac{r}{4} \cos \theta$ ،  $y = 2r \sin \theta$

[۲۰ نمره] (۵) انشعابات وابسته به پارامتر  $\mu$  در دستگاه زیر را بررسی کرده، نماهای فاز بطور کیفی متمایز را برای مقادیر  $\mu \in \mathbb{R}$  رسم کنید.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (x^2 - 1)(x - \mu).$$

راهنمایی: مقادیری از پارامتر  $\mu$  را تعیین کنید که تابع پتانسیل وابسته به این معادله عام نباشد.

موفق باشید.